CONCOURS 1977

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

N. B. — *Les deux parties du problème sont indépendantes.*

On note $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2 et $\dot{I}$ la matrice unité d'ordre 2.

I

1° Soit $T \in \mathfrak{M}_2$, $T = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & r \end{pmatrix}$ où $q \neq 0$.

a. Prouver que les matrices qui commutent avec T forment un espace vectoriel $\mathcal{V}$, dont une base est $(T, \dot{I})$.

b. Montrer : $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad T^n \in \mathcal{V}$.

Dans quel cas a-t-on : $\forall\ m \in \mathbb{Z} \quad T^m \in \mathcal{V}$?

2° On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad T^n = \lambda_n T + \mu_n \dot{I}$.

a. Calculer λ_2 et μ_2 en fonction de p, q, r.

b. Calculer λ_n et μ_n en fonction de n dans les trois cas suivants :

$(\alpha)\ (p = 3,\ q = r = -2)$; $(\beta)\ (p = q = r = 1)$;
$(\gamma)\ (p = 3,\ q = r = 1)$.

3° On sait que $\mathcal{V}$ muni du produit usuel des matrices est un anneau.

a. A quelle condition $\mathcal{V}$ est-il un corps? Donner l'inverse dans $\mathcal{V}$ de : $\pi = \lambda T + \mu \dot{I}$, élément de $\mathcal{V}$.

b. $\mathcal{V}$ est-il isomorphe à $\mathbb{C}$ corps des nombres complexes?

c. Examiner dans les trois cas (α), (β), (γ) du § 2°, si $\mathcal{V}$ est un corps. Dans les cas où $\mathcal{V}$ n'est pas un corps, on donnera les éléments non inversibles dans $\mathcal{V}$.

4° On considère l'application φ qui à $A \in \mathfrak{M}_2$ associe $\varphi(A) = T\,A$.

a. Prouver que $\mathcal{V}$ est stable par φ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un automorphisme de $\mathfrak{M}_2$.

b. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{E}$ formée des matrices :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5° Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de φ dans les trois cas (α), (β), (γ) du § 2°. On indiquera si φ est diagonalisable ou non.

6° *a.* Montrer que $\mathcal{B} = (T, \dot{I}, E_3, E_4)$ est une base de $\mathfrak{M}_2$ et écrire la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

b. On se place dans le cas où $\mathcal{V}$ est un corps et on pose $T = \omega$. Pour $\pi = \lambda T + \mu \dot{I}$, on écrit : $\pi = \lambda\,\omega + \mu$.

Montrer que $\mathfrak{M}_2$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathcal{V}$. Exprimer $\dot{I}$ et T sous forme de combinaisons linéaires de E_3 et E_4 à coefficients dans $\mathcal{V}$.

c. En déduire la dimension et une base de $\mathfrak{M}_2$, espace vectoriel sur $\mathcal{V}$.

Donner les composantes de $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ sur cette base.

. . . / . . .

×I58× E.S.I. MARSEILLE 1977

II

On note $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_2$ et $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathfrak{M}_2$. On considère $S \in \mathcal{S}$, $S = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$ où $q \neq 0$ et ψ l'application qui à $A \in \mathfrak{M}_2$ associe $\psi(A) = S A S$.

1° *a.* Prouver $\mathfrak{M}_2 = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

b. Prouver que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont stables par ψ.

2° *a.* Soit ψ_1 l'endomorphisme induit par ψ sur $\mathcal{S}$. Trouver le noyau de ψ_1 et sa dimension; discuter.

b. Trouver le noyau de ψ et sa dimension.

3° Soit la base $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{S}$ formée des matrices :

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E'_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Donner la matrice H de ψ_1 dans la base $\mathcal{E}'$.

b. H est une matrice symétrique d'ordre 3 et on considère la forme quadratique Q de $\mathcal{S}$ dont H est la matrice associée dans la base $\mathcal{E}'$.

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{S}$. Donner l'expression de Q (M) en fonction de x, y, z.

Décomposer Q en carrés indépendants dans le cas où $p \neq 0$ et dans le cas où $p = r = 0$.

c. Préciser les cas où Q est dégénérée et les cas où Q est non dégénérée. On indiquera dans chacun des cas, s'il existe des vecteurs isotropes relativement à Q, non nuls. Comparer le noyau de Q et l'ensemble des vecteurs isotropes. *La forme polaire de Q peut-elle être un produit scalaire?* Si oui, dans quel cas?

4° On prend désormais : $p = q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et on suppose que $\mathcal{E}'$ est une base orthonormée de $\mathcal{S}$ par rapport à un produit scalaire, défini sur $\mathcal{S}$ indépendamment de Q.

a. Construire une base de $\mathcal{S}$ qui soit orthonormée dans $\mathcal{S}$ et orthogonale par rapport à Q.

b. Trouver l'ensemble des vecteurs isotropes relativement à Q. On indiquera la nature de la surface trouvée.

X159X

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail